

Subloading t_{ij} model の改良と陰解法定式化

構成モデル 弾塑性 陰解法

地域 地盤 環境 研究所
JIP テクノサイエンス
千葉工業大学中井 照夫
高橋 寛臣
金田 一広

粘性土から砂質土まで扱える弾塑性モデル(Subloading t_{ij} model)^{1),2)}を使いやすく改良すると共に、陰解法での定式化を示す。モデルは、①中間主応力の影響、②ひずみ増分方向の応力経路依存性、③密度・拘束応力の影響、④自然堆積土にみられるボンディング効果を唯一的に説明できる。

1. 改良した Subloading t_{ij} model とリターンマッピング式

①既往の応力パラメータ($p, \eta=q/p$)ではなく、修正応力 t_{ij}^3 に基づく応力パラメータ($t_N, X=ts/t_N$)で降伏関数 $f=0$ を作り、その空間で流れ則を仮定する(中間主応力の影響を自動的に考慮できるとともに降伏関数が圧縮応力内で定義できる)。
②塑性ひずみ増分を関連流動則成分(AF) と等方圧縮成分(IC)に分けるが、ひずみ硬化パラメータの塑性体積ひずみは関連流動則モデルのそれと同じである(単一の降伏関数・硬化パラメータで塑性流動方向の応力経路依存性を表現できる)
③正規圧密状態の間隙比と現在の間隙比の差 ρ を密度の状態変数として、その発展則を与えることで密度・拘束応力の影響を考慮できる(これは下負荷面の概念³⁾と等価であるが複数の降伏面を定義する必要はない)。
④ ρ に加えてボンディングの状態変数 ω (ボンディング効果を見かけの間隙比の減少に置き換える)を導入し、 ω の発展則を与え、 $\rho^*=\rho+\omega$ すると③と同じ発展則で自然堆積土の挙動が説明できる。今回はモデルをより簡潔にパラメータの同定をやりやすくするため、 ρ および ω の発展則を改良した。改良した Subloading t_{ij} model (iVersion=5)の基本式は増分形で次式のように表せる。

$$\bullet f = F - H - \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} = 0 \quad (1)$$

$$\bullet d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{ij}} - \frac{R^{(IC)}}{h^{p(IC)}} \frac{dt_N}{t_N} \left(\frac{\partial F / \partial t_{ij}}{\partial F / \partial t_{kk}} - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \quad \left(\text{where, } \Lambda = \frac{dF}{h^p} \right) \quad (2)$$

$$\bullet d\varepsilon_v^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} \quad (3)$$

$$\bullet d\rho = -(1+e_0) \frac{G}{1+k_a X} \frac{\sqrt{3}\Lambda}{t_N} \quad (\text{where, } G = a\rho^* = a(\rho+\omega)) \quad (4)$$

$$\bullet d\omega = -(1+e_0) Q \frac{\sqrt{3}\Lambda}{t_N} \quad (\text{where, } Q = b\omega) \quad (5)$$

where

$$F = \ln \frac{t_{N1}}{t_{N0}} = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X), \quad \zeta(X) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{X}{M^*} \right)^\beta \quad (6)$$

(where $X = t_s / t_N$)

$$H = \frac{(-\Delta e)^p}{\lambda - \kappa} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \quad (7)$$

$$h^p = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t_{kk}} + \frac{\sqrt{3} G}{(1+k_a X) t_N} \right\} \quad (8)$$

$$h^{p(IC)} = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ 1 + \left\langle \frac{G}{1+k_a X} \right\rangle \right\} \quad (9)$$

Fig. 1(a) に示すように、 t_s 軸は $\sigma_3=0$ 軸と一致するので降伏曲面上もその内側にも引張り応力域はない。また、(1)式は **Fig. 1(b)** の関係から誘導できる。(2)式に示すように、塑性ひずみ増分として、 t_{ij} 空間で関連流動則を満足する(AF)成分の他に等方圧縮(IC)成分考えることで、②の応力経路依存性を表現できる。ただし、(IC)成分を考慮しても塑性体積ひずみ増分は(IC)成分有無の拘わらず変わらない。また、従来は、塑性係数 h^p や $h^{p(IC)}$ の中に独立でボンディングの項を入れていたが、(4)式に示すように $\rho^*=(\rho+\omega)$ で密度とボンディングの発展則を同じ土俵で評価するように変更した。ここに、 G および Q は、 ρ や ω が塑性ひずみの発生と共に減少する発展則となるので、**Fig. 2** に示すように正の比例関数で与える。(4)式の k_a はせん断時の ρ の減少が圧縮時に比べ穏やかになることを考慮するために導入したパラメータである。また、 $R^{(IC)}$ は塑性ひずみ増分中の等方圧縮成分の割合を決めるもので、**Fig. 3** に示すように、等方応力($X=0$)で1であり、 $d\varepsilon^p$ がゼロとなる($\partial F / \partial t_{kk}=0$)応力比で0となる関数である。上式において、 $R^{(IC)}=0$ とすると関連流動則(AF)だけのモデルになり、 $\omega=0$ とするとボンディングを考えないモデルになる。

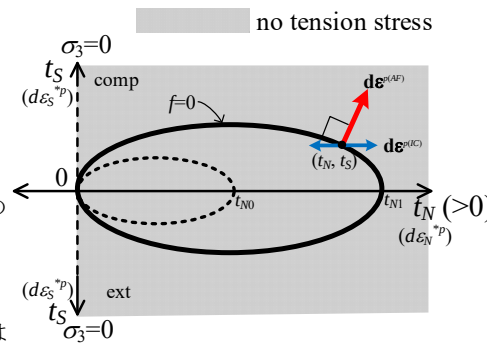
上式を Return mapping 式に変換する。現状態を n step, $\Delta \varepsilon$ のひずみ増分を与えたときの状態を $n+1$ step とする。以後、 n step および初期状態は下添字 $n, 0$ で、 $n+1$ step は下添字なしで表す。上添字の e, p および(trial) は弾性成分、塑性成分および弾性を仮定する試行状態を意味する。ここに、 $\Delta \varepsilon^p = \varepsilon^{e(trial)} - \varepsilon^e$ と表せるので、 $n+1$ step での陰的關係式として以下の式が得られる。なお、ボールド体の記号はベクトルあるいはテンソル成分を意味する。 $\mathbf{N}$ および $\mathbf{N}^{(IC)}$ は $\partial F / \partial t_{ij}$ および δ_{ij} をベクトル表示したものである

$$\bullet \mathbf{b}_1 = \varepsilon^e - \varepsilon^{e(trial)} + \Delta \gamma \mathbf{N} - \frac{R^{(IC)}}{h^{p(IC)}} \ln \frac{t_N}{t_{N,n}} \left(\frac{\mathbf{N}}{\text{tr} \mathbf{N}} - \mathbf{N}^{(IC)} \right) = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eq. (2)}) \quad (10)$$

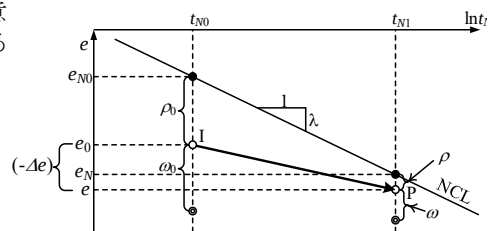
$$\bullet \mathbf{b}_2 = \rho - \rho_n - \Delta \gamma \left\{ -(1+e_0) \sqrt{3} \frac{a(\rho+\omega)}{(1+k_a X)} \right\} = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eq. (4)}) \quad (11)$$

$$\bullet \mathbf{b}_3 = \ln \frac{t_N}{t_{N0}} + \zeta(X) - \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \left\{ \varepsilon_{v,n}^p + \Delta \gamma \text{tr} \mathbf{N} \right\} - \frac{\rho_0 - \rho}{\lambda - \kappa} = 0 \quad (\Leftarrow \text{Eqs. (1) and (3)}) \quad (12)$$

ボンディング効果を表す ω は、(4)式が $d\omega$ と $d\gamma (= \Lambda)$ に関する微分方程式なので、(11)式の ω は(5)式を積分することで ω_n を使って計算される。



(a) 降伏曲面と塑性ひずみ増分方向

(b) 初期および現状態での e - $\ln t_N$ 関係Fig. 1 Subloading t_{ij} model の説明図

$$\omega = \omega_n \exp\left(-b(1+e_0)\sqrt{3}\frac{\Delta\gamma}{t_N}\right) \quad (\Leftarrow \text{Eq.(5)}) \quad (13)$$

従って、(10)～(12)式は ϵ^e , $\Delta\gamma$, ρ を未知数とする非線形連立方程式とみなすことができる。すなわち、

$$\mathbf{b}=(b_1 \ b_2 \ b_3)^T, \mathbf{x}=(x_1 \ x_2 \ x_3)^T=(\epsilon^e \ \Delta\gamma \ \rho)^T \text{とした時、}\mathbf{b}(\mathbf{x})=0$$

を Newton 法で解くことになる。

また、試行弾性状態を含め弾性ひずみ ϵ^e から応力を求めるには、弾性ひずみと応力が一意的に決まる弾性式が必要であるが、引張り応力が発生せず地盤材料の非線形弾性挙動を説明できる弾性モデル $\sigma=\mathbf{E}^e(\epsilon^e)$ を使って計算できる。弾性モデルの内容は文献⁵⁾を参照のこと。

2. 解析例

Table 1 に材料パラメータを示す。NC は正規圧密土、OC は過圧密土、SC は自然堆積土で必要とされるパラメータ意味する。これらのパラメータは材料の間隙比・拘束応力や中間主応力の大きさに依らない。断らないかぎり、密度・拘束応力に関するパラメータは $a=100$, $k_a=8$ で解析している。**Fig.4** は正規圧密土(NC)、過圧密土(OC)および自然堆積土(SC)の等方圧縮試験の解析結果を示すが、種々の土の圧縮特性をよく表現できている。ここに、破線は $a=600$ としたときの結果である。 a を大きくすると、硬い初期

剛性と急激な剛性変化を表現する。同図の灰色の点線はボンディングの減少をゼロ($b=0$)とした結果である。これを参考に、初期のボンディング ω_0 を推定することも可能である(ボンディングがある場合この線より上方に圧縮曲線はいかない)。**Fig. 5** は側圧一定排水三軸圧縮試験の解析結果を示す。ここでも、種々の土のせん断特性をよく表現している。破線は $a=600$, $k_a=50$ の結果であるが、 $a=100$, $k_a=8$ の結果とほぼ同じ曲線になる。パラメータ k_a の導入により、 a の値に依らずせん断

試験をシミュレートできる。すなわち、 $100:8 \approx 600:50$ なので a が異なっても a と k_a の比がほぼ同じであればせん断時に同じ応力ひずみ曲線を描く。なお、**Fig 5** 中の黒丸は正規圧密土の実測値である。**Fig. 6** は種々の土の1次元圧縮時の K_0 値の変化の解析結果を示す。何れの土もひずみの進行と共に、正規状態に近づくまた、そのときの K_0 値は正規状態でよく観察される 0.5 に近い値となる。一方、破線は(IC)成分を考えない解析結果であるが正規状態でも大きな値となる。**Fig. 7** は種々の土の非排水三軸試験の有効応力経路と応力・ひずみ関係の解析結果を示す。自然堆積土の q の減少や巻き戻しを示す過圧密状態の自然堆積土の特徴的な応力経路を表現している。同図でも、黒丸は正規圧密土の実測値を示す。また、破線は(IC)成分を考慮しない正

規圧密土の実測値を示すが、初期の剛性が実測値や(IC)成分を考慮した場合に比べ極端に大きくなる。なお、有効応力経路は(IC)成分の有無に拘わらず同じである。また、白抜き丸は step の増分を大きくした結果である。

文献：

1) Nakai & Hinokio (2004): S&F,

44(2), 53-70. 2) Nakai et al.(2011): S&F, 51(6), 1149-1168. 3) Nakai & Mihara (1984): S&F, 24(2), 82-94. 4) Hashiguchi (1984): J.

of Appli. Mech. ASME, 102(2), 266-272. 5) 中井・石川・Shahin (2018)：第53回JGS研究発表会, 369-370.

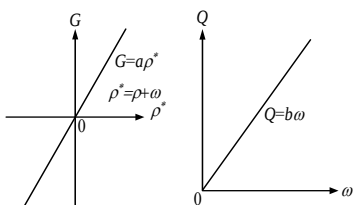


Fig. 2 線形で与えた関数 G と Q

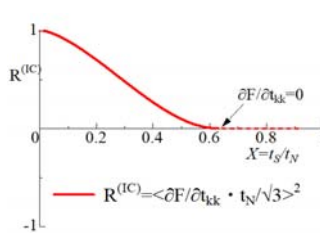


Fig. 3 関数 $R^{(IC)}$

Table 1 藤の森粘土の材料パラメータ

λ	0.090	Same parameters as Cam clay model	NC
κ	0.010		
$N=e_{NC}$ at $p=98$ kPa	0.83		
$R_0=(\sigma_1/\sigma_2)_{(comp.)}$	3.5		
v_c	0.2	Shape of yield surface	OC
β	1.5		
a	100	Influence of density and confining pressure	SC
k_a	8		
ω_0	0.10	Influence of bonding	
b	20		

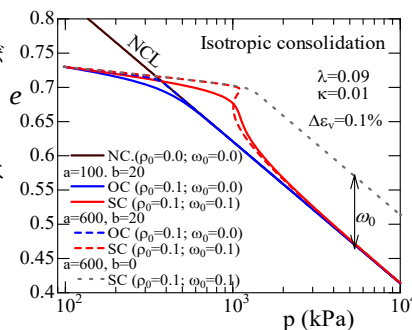


Fig. 4 等方圧縮試験の解析

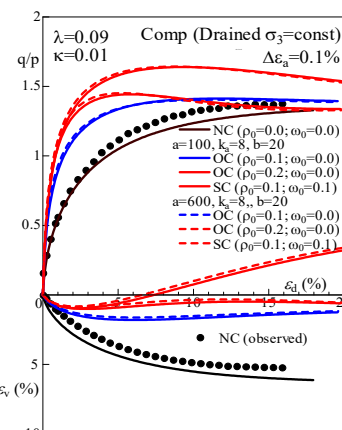


Fig. 5 せん断試験の解析

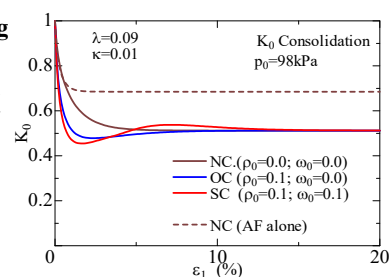


Fig. 6 1次元圧縮時の K_0 値の解析

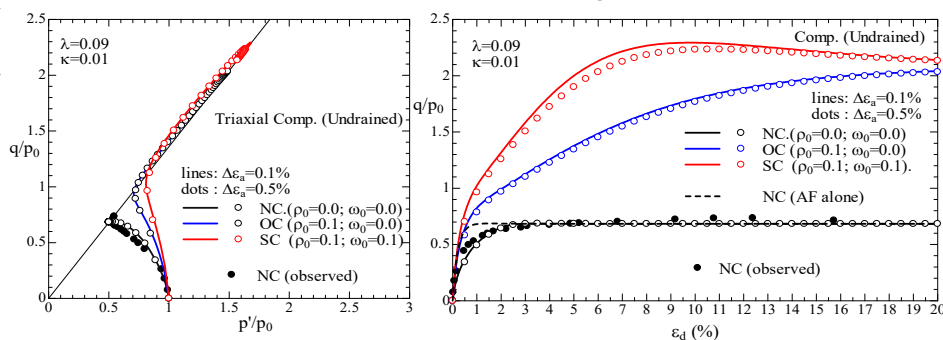


Fig. 7 非排水三軸圧縮試験の解析